Краткие сообщения ОИЯИ №9-85 JINR Rapid Communications No.9-85
УДК 530.1+535.371

НЕРАВНОВЕСНАЯ САМОКОРРЕЛЯЦИЯ И СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В ПАРАМАГНЕТИКЕ

Н.Н.Боголюбов /мл./, М.Т.Тураев*, А.С.Шумовский, В.И.Юкалов

Исследован механизм сверхизлучательной генерации в парамагнетике типа $La_2Mg_3(NO_3)_{12}\cdot 24\cdot H_2O$ с примесью Co^{2+} и Ce^{3+}. Показано, что корреляция излучателей обусловлена взаимодействием электронных и ядерных спинов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Nonequilibrium Self-Correlation and Superradiance in Paramagnet

N.N.Bogolubov, Jr. et al.

The mechanism of superradiance generation in paramagnet of the type of $La_2Mg_3(NO_3)_{12}\cdot 24\cdot H_2O$ with the impurity of Co^{2+} and Ce^{3+} is examined. It is shown that the correlation of emitters is due to the interaction of electron and nuclear spins.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Хорошо известное явление электромагнитного сверхизлучения /СИ/ связывают обычно с механизмом однофотонного обмена, приводящим к возникновению в системе состояния Дикке /1/. Другой физический механизм был указан и исследован в работах /2-5/. В отличие от механизма Дикке однофотонный обмен играет здесь лишь вспомогательную роль, тогда как основная принадлежит "прямому" взаимодействию излучателей, обусловливающему их корреляцию в процессе релаксации системы в состояние равновесия /неравновесная самокорреляция /НС//. Такого рода явление СИ может наблюдаться в сегнетоэлектриках ниже точки Кюри при выводе их из состояния равновесия /4,5/. Другим примером может служить сверхизлучательная генерация в парамагнетике $La_2Mg_3(NO_3)_{12}\cdot 24H_2O$ с примесью Co^{2+} и Ce^{3+}, реализованная недавно экспериментально /6/. В этом случае роль накачки играет отклонение спинов внешним переменным полем $\vec{B}$, на-

*Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

правленным под углом к постоянному сильному полю $\vec{B}^0$. Поле $\vec{B}^0$ обеспечивает равновесное упорядочение как электронных, так и ядерных спинов, а НС излучателей в ядерной подсистеме обусловлена взаимодействием между электронными и ядерными спинами.

Покажем, что описанный выше механизм действительно приводит к СИ. Рассматриваемую физическую систему будем характеризовать гамильтонианом [7]

$$H_{SI} = H_{S-I} + H_{ph} + H_{I-ph} . \qquad /1/$$

Здесь H_{S-I} описывает энергию среды и имеет вид

$$H_{S-I} = \sum_{i=1}^{N} \{ g_{\parallel}^{e} \beta B_z^0 S_i^z + g_{\perp}^{e} \beta (B_x^0 S_i^x + B_y^0 S_i^y) + $$

$$+ A_{\parallel} S_i^z I_i^z + A_{\perp} (S_i^x I_i^x + S_i^y I_i^y) - g_{\parallel}^{n} \beta_n B_z^0 I_i^z - \qquad /2/$$

$$- g_{\perp}^{n} \beta_n (B_x^0 I_i^x + B_y^0 I_i^y) + P_{\parallel} [(I_i^z)^2 - \frac{1}{2} I(I+1)] \},$$

где B_x^0, B_y^0, B_z^0 - компоненты постоянного внешнего магнитного поля, S^x, S^y, S^z - спиновые операторы, I^x, I^y, I^z - ядерные спины, величины $g_{\parallel}^{e}$, $g_{\perp}^{e}$, $g_{\parallel}^{n}$, $g_{\perp}^{n}$ - константы,характеризующие вклады орбитального и спинового моментов в полный угловой момент; $A_{\perp}$, $A_{\parallel}$ - константы электронно-ядерной системы, $P_{\parallel}$ - параметр ядерного электрического квадрупольного взаимодействия, β - магнетон Бора, β_n - ядерный магнетон.

Оператор H_{ph} соответствует энергии свободного электромагнитного поля

$$H_{ph} = \sum_q \hbar \omega_q (a_q^+ a_q + \frac{1}{2}). \qquad /3/$$

Последний член в /1/ описывает взаимодействие ядерных спинов с полем излучения и имеет следующий вид:

$$H_{I-ph} = \sum_{qr} i \lambda_{qx} (a_q^+ e^{-i\vec{q}\vec{r}} - a_q e^{i\vec{q}\vec{r}}) I_r^x +$$

$$+ \sum_{qr} i \lambda_{qy} (a_q^+ e^{-i\vec{q}\vec{r}} - a_q e^{i\vec{q}\vec{r}}) I_r^y , \qquad /4/$$

где

$$\lambda_{qx} \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{2\pi\hbar c \rho}{q} \right)^{1/2} \cdot (q_y e_{qz} - q_z e_{qy}),$$

$$\lambda_{qy} \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{2\pi\hbar c \rho}{q} \right)^{1/2} \cdot (q_z e_x - q_x e_z), \quad S^z = \sum_{i=1}^{N} S_i^z, \quad I^z = \sum_{i=1}^{N} I_i^z .$$

Используя метод работ [8,9], для системы с гамильтонианом /1/ можно получить следующую точную иерархию кинетических уравнений, описывающую процесс спонтанного излучения:

$$\frac{\partial}{\partial t}<\mathcal{O}(t)>+\frac{i}{\hbar}<[H_{S-I};\ \mathcal{O}(t)]>=$$

$$=\frac{1}{i\hbar^2}\sum_q\int_{t_0}^{t}d\tau e^{-i\omega_q(t-\tau)}<\sum_{r=1}^{N}e^{-i\vec{q}\vec{r}}(\lambda_{qx}I_r^x(\tau)+\lambda_{qy}I_r^y(\tau))\times$$

$$\times[\mathcal{O}(t);\sum_{i=1}^{N}e^{-i\vec{q}\vec{r}}(\lambda_{qx}I_r^x(t)+\lambda_{qy}I_r^y(t))]>-$$

$$-\frac{1}{i\hbar^2}\sum_q\int_{t_0}^{t}d\tau e^{-i\omega_q(t-\tau)}<[\mathcal{O}(t);\sum_{i=1}^{N}e^{i\vec{q}\vec{r}}(\lambda_{qx}I_r^x(t)+\lambda_{qy}I_r^y(t))]\times \qquad /5/$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}e^{i\vec{q}\vec{r}}(\lambda_{qx}I_r^x(\tau)+\lambda_{qy}I_r^y(\tau))>,$$

где $\mathcal{O}(t)$ - оператор, действующий на собственные функции гамильтониана /1/, относящиеся только к электронной подсистеме в представлении Гейзенберга.

При значениях $\mathcal{O}(t)=S^x,\ S^y,\ S^z,\ I^x,I^y,I^z$ из /5/ имеем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}<S^x>=-\dfrac{1}{\hbar}\sum\limits_{i=1}^{N}<g_{\parallel}^{e}\beta B_z^0S_i^y+g_{\perp}^{e}\beta B_y^0S_i^z+A_{\parallel}I_i^zS_i^y+A_{\perp}I_i^yS_i^z>\\ \dfrac{\partial}{\partial t}<S^y>=-\dfrac{1}{\hbar}\sum\limits_{i=1}^{N}<g_{\parallel}^{e}\beta B_z^0S_i^x+g_{\perp}^{e}\beta B_x^0S_i^z+A_{\parallel}I_i^zS_i^x+A_{\perp}I_i^yS_i^z> \qquad /6/\\ \dfrac{\partial}{\partial t}<S^z>=-\dfrac{1}{\hbar}\sum\limits_{i=1}^{N}<g_{\perp}^{e}\beta(B_x^0S_i^y+B_y^0S_i^x)+A_{\perp}(I_i^xS_i^y+I_i^yS_i^x)>,\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}<I^x>+\frac{1}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}<A_{\parallel}S_i^zI_i^y+A_{\perp}S_i^yI_i^z-g_{\parallel}^{n}\beta_nB_z^0I_i^y-g_{\perp}^{n}\beta_nB_y^0I_i^z>=$$

$$=\frac{1}{i\hbar^2}\sum_q\sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t}e^{-i\omega_q(t-\tau)}e^{i\vec{q}(r'-r)}\{\lambda_{qy}^2<I_r^z(t)I_{r'}^y(\tau)>+$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}<I_r^z(t)I_{r'}^x(\tau)>\}d\tau-$$

$$-\frac{1}{i\hbar^2}\sum_q\sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t}e^{i\omega(t-\delta)}e^{iq(r-r')}\{\lambda_{qy}^2<I_{r'}^y(\delta)I_r^z(t)>+ \qquad /6a/$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}<I_{r'}^x(\tau)I_r^z(t)>\}d\tau,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}<I^y>+\frac{1}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}<A_{\parallel}S_i^zI_i^x+A_{\perp}S_i^xI_i^z-g_{\parallel}^n\beta_nB_z^0I_i^x-g_{\perp}\beta_nB_x^0I_i^z>=$$

$$=\frac{1}{i\hbar^2}\sum_q\sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t}e^{-i\omega_q(t-\tau)}e^{i\vec{q}(r'-r)}\{\lambda_{qx}^2<I_{r'}^x(\tau)I_r^z(t)>+$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}<I_{r'}^y(\tau)I_r^z(t)>\}d\tau-$$

$$-\frac{1}{i\hbar^2}\sum_q\sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t}e^{i\omega_q(t-\tau)}e^{i\vec{q}(r-r')}\{\lambda_{qx}^2<I_r^z(t)I_{r'}^x(\tau)>+ \qquad /6б/$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}<I_r^z(t)I_{r'}^y(\tau)>\}d\tau,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}<I^z>+\frac{1}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}<A_{\perp}(B_x^0I_i^y+B_y^0I_i^x)-g_{\perp}^n\beta_n(B_x^0I_i^y+B_y^0I_i^x)>=$$

$$=\frac{1}{i\hbar^2}\sum_q\sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t}e^{-i\omega_q(t-\tau)}e^{i\vec{q}(r-r')}\{\lambda_{qx}^2<I_{r'}^x(\tau)I_r^y(t)>+$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}(<I_{r'}^x(\tau)I_r^x(t)>+<I_{r'}^y(\tau)I_r^y(t)>)+\lambda_{qy}^2<I_{r'}^y(\tau)I_r^x(t)>\}d\tau-$$

$$-\frac{1}{i\hbar^2}\sum_q\sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t}e^{i\omega_q(t-\tau)}e^{i\vec{q}(r-r')}\{\lambda_{qx}^2<I_r^x(t)I_{r'}^y(\tau)>+ \qquad /6в/$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}(<I_r^y(t)I_{r'}^y(\tau)>+<I_{r'}^x(\tau)I_r^x(t)>)+\lambda_{qy}^2<I_r^x(t)I_{r'}^y(\tau)>\}d\tau.$$

Нетрудно видеть, что соотношения /6а-в/ представляют собой интегродифференциальные уравнения, в правой части которых стоят двухвременные средние более высокого порядка, чем в левой. Для простоты перейдем к приближению самосогласования, т.е. совершим расцепление бинарных средних вида

$$<S^{\alpha}S^{\beta}>\cong<S^{\alpha}><S^{\beta}>,$$

$$<I^{\alpha}I^{\beta}>\cong<I^{\alpha}><I^{\beta}>,$$

$$<SI>\cong<S><I>.$$

Тогда система /6/-/6а-в/ принимает вид

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}<S^x> = -\frac{1}{\hbar}\Big(\frac{A_\parallel}{N}<S^z><I^y> + \frac{A_\perp}{N}<I^y><A^z> + \\ + g_\parallel^e \beta B_z^0 <S^y> + g_\perp^e \beta B_y^0 <S^z>\Big), \\ \frac{\partial}{\partial t}<S^y> = -\frac{1}{\hbar}\Big(\frac{A_\parallel}{N}<I^z><S^x> + \frac{A_\perp}{N}<I^x><S^z> + \\ + g_\parallel^e \beta B_z^0 <S^x> + g_\perp^e \beta B_x^0 <S^z>\Big) \\ \frac{\partial}{\partial t}<S^z> = -\frac{1}{\hbar}\Big(\frac{A_\parallel}{N}<I\ ><S\ > + \frac{A_\perp}{N}<I\ ><S\ > + \\ + g_\perp^e \beta B_x^0 <S^y> + g_\perp^e \beta B_y^0 <S^x>\Big).\end{cases} \qquad /7/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}<I^x> + \frac{1}{\hbar}\Big(\frac{A_\parallel}{N}<S^x><I^y> + \frac{A_\perp}{N}<S^y><I^z> -$$

$$- g_\parallel^n \beta_n B_z^0 <I^y> - g_\perp^n \beta_n B_y^0 <I^z>\Big) =$$

$$= \frac{1}{i(\hbar N)^2}\sum_q \sum_{rr'}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-i\omega_q(t-\tau)} e^{i\vec{q}(r'-r)} \{\lambda_{qy}^2 <I_{r'}^y(\tau)><I_r^z(t)> +$$

$$+ \lambda_{qx}\lambda_{qy} <I_r^z(t)><I_{r'}^x(\tau)>\} d\tau -$$

$$- \frac{1}{i(\hbar N)^2}\sum_q \sum_{rr'}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{i\omega_q(t-\tau)} e^{i\vec{q}(r-r')} \{\lambda_{qy}^2 <I_{r'}^y(\tau)><I_r^z(t)> + \qquad /7a/$$

$$+ \lambda_{qx}\lambda_{qy} <I_{r'}^x(\tau)><I_r^z(t)>\} d\tau,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}<I^y> + \frac{1}{\hbar}\Big(\frac{A_\parallel}{N}<S^z><I^x> + \frac{A_\perp}{N}<S^x><I^z> -$$

$$- g_\parallel^n \beta_n B_z^0 <I^x> - g_\perp^n \beta_n B_x^0 <I^z>\Big) =$$

$$= \frac{1}{i(\hbar N)^2}\sum_q \sum_{rr'}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{-i\omega_q(t-\tau)} e^{i\vec{q}(r'-r)} \{\lambda_{qx}^2 <I_{r'}^x(\tau)><I_r^z(t)> +$$

$$+ \lambda_{qx}\lambda_{qy} <I_{r'}^y(\tau)><I_r^z(t)>\} d\tau -$$

$$- \frac{1}{i(\hbar N)^2}\sum_q \sum_{rr'}^{N} \int_{t_0}^{t} e^{i\omega_q(t-\tau)} e^{i\vec{q}(r-r')} \{\lambda_{qx}^2 <I_{r'}^x(\tau)><I_r^z(t)> +$$

$$+ \lambda_{qx}\lambda_{qy} <I_r^z(t)><I_{r'}^y(\tau)>\} d\tau, \qquad /7б/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}<I^z> + \frac{1}{\hbar}\{A_\perp B_x^0 <I^y> + A_\perp B_y^0 <I^x> -$$

$$- g_\perp^n \beta_n (B_x^0 < I^y > + B_y^0 <I^x>)\} =$$

$$= \frac{1}{i(\hbar N)^2} \sum_q \sum_{rr'}^N \int_{t_0}^t e^{-i\omega\,(t-\tau)} e^{iq(r'-r)} \{\lambda_{qx}^2 <I_{r'}^x(\tau)> <I_r^y(t)> +$$

$$+ \lambda_{qx}\lambda_{qy} (<I_{r'}^x(\tau)> <I_r^x(t)> + <I_{r'}^y(\tau)> <I_r^y(t)>) +$$

$$+ \lambda_{qy}^2 <I_{r'}^y(\tau)> <I_r^x(t)> \} d\tau -$$

$$- \frac{1}{i(\hbar N)^2} \sum_q \sum_{rr'}^N \int_{t_0}^t e^{i\omega_q(t-\tau)} e^{i\vec{q}(r-r')} \{\lambda_{qx}^2 <I_r^y(t)> <I_{r'}^x(\tau)> +$$

/7в/

$$+ \lambda_{qx}\lambda_{qy} (<I_{r'}^y(\tau)> <I_r^y(t)> + <I_{r'}^x(\tau)> <I_r^x(t)>) +$$

$$+ \lambda_{qy}^2 <I_r^x(t)> <I_{r'}^y(\tau)> \} d\tau.$$

Так как нас прежде всего интересуют качественные результаты, сделаем следующие предположения. Будем считать, что поле $\vec{B}^0$ направлено вдоль оси z, и, так как для рассматриваемой системы $|A_\perp| << |A_\parallel|$ /7/, пренебрежем соответствующими членами. Тогда системы уравнений /7/ и /7а-в/ принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}<S^x> = \frac{-1}{h}(g_\parallel^e \beta B_z^0 <S^y> + \frac{A_\parallel}{N} <I^z> <S^y>), \\ \frac{\partial}{\partial t}<S^y> = -\frac{1}{h}(g_\parallel^e \beta B_z^0 <S^x> + \frac{A_\parallel}{N} <I^z> <S^x>), \\ \frac{\partial}{\partial t}<S^z> = 0. \end{cases} \qquad /8/$$

$$\frac{\partial}{\partial t}<I^x> + \frac{1}{\hbar}(\frac{A_\parallel}{N} <S^z> <I^y> - g_\parallel^n \beta_n B_z^0 <I^y>) =$$

$$= \frac{1}{i(\hbar N)^2} \sum_q \sum_{rr'}^N \int_{t_0}^t e^{-i\omega_q(t-\tau)} e^{i\vec{q}(r'-r)} \{\lambda_{qy}^2 <I_{r'}^y(\tau)> <I_r^z(t)> +$$

$$+ \lambda_{qx}\lambda_{qy} <I_r^z(t)> <I_{r'}^x(\tau)> \} d\tau -$$

$$-\frac{1}{i(\hbar N)^2}\sum_q \sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_q(t-\tau)}\, e^{i\vec{q}(r-r')}\{\lambda_{qy}^2 \langle I_{r'}^{y}(\tau)\rangle\langle I_r^{z}(t)\rangle +$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}\langle I_{r'}^{x}(\tau)\rangle\langle I_r^{z}(t)\rangle\}\,d\tau, \tag{8a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle I^y\rangle + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{A_{\parallel}}{N}\langle S^z\rangle\langle I^x\rangle + g_{\parallel}^{n}\beta_n B_z^0\langle I^x\rangle\right) =$$

$$=\frac{1}{i(\hbar N)^2}\sum_q \sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-i\omega_q(t-\tau)}\, e^{i\vec{q}(r'-r)}\{\lambda_{qx}^2 \langle I_{r'}^{x}(\tau)\rangle\langle I_r^{z}(t)\rangle +$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}\langle I_{r'}^{y}(\tau)\rangle\langle I_r^{z}(t)\rangle\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{i(\hbar N)^2}\sum_q \sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_q(t-\tau)}\, e^{i\vec{q}(r-r')}\{\lambda_{qx}^2 \langle I_{r'}^{x}(\tau)\rangle\langle I_r^{z}(t)\rangle +$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}\langle I_{r'}^{y}(\tau)\rangle\langle I_r^{z}(t)\rangle\}\,d\tau, \tag{8б}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle I^z\rangle = \frac{1}{i(\hbar N)^2}\sum_q \sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-i\omega_q(t-\tau)}\, e^{i\vec{q}(r'-r)}\{\lambda_{qx}^2 \langle I_{r'}^{x}(\tau)\rangle\langle I_r^{y}(t)\rangle +$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}\left(\langle I_{r'}^{x}(\tau)\rangle\langle I_r^{x}(t)\rangle + \langle I_{r'}^{y}(\tau)\rangle\langle I_r^{y}(t)\rangle\right) +$$

$$+\lambda_{qy}^2\langle I_{r'}^{x}(\tau)\rangle\langle I_r^{y}(t)\rangle\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{i(\hbar N)^2}\sum_q \sum_{rr'}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_q(t-\tau)}\, e^{i\vec{q}(r-r')}\{\lambda_{qx}^2 \langle I_{r'}^{x}(\tau)\rangle\langle I_r^{y}(t)\rangle +$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}\left(\langle I_{r'}^{x}(\tau)\rangle\langle I_r^{x}(t)\rangle + \langle I_{r'}^{y}(\tau)\rangle\langle I_r^{y}(t)\rangle\right) +$$

$$+\lambda_{qy}^2\langle I_{r'}^{y}(\tau)\rangle\langle I_r^{x}(t)\rangle\}\,d\tau. \tag{8в}$$

Как нетрудно видеть, $\langle S^z\rangle = \mathrm{const}$ и в последние три уравнения для средних ядерной подсистемы входит только $\langle S^z\rangle$. Уравнения /8а/-/8в/ представляют собой эквивалент иерархии кинетических уравнений для спонтанного излучения [9], поэтому их исследование может быть выполнено стандартными методами. В частности, по аналогии с работой [10] можно вычислить интенсивность сверхизлучательной генерации

$$I(t) = \sum_q \hbar\omega_q \frac{d}{dt}\langle a_q^+ a_q\rangle$$

и найти соответствующую частоту когерентного электромагнитного поля.

Таким образом, мы показали, что в парамагнетике типа $La_2Mg_3(NO_3)_{12}\cdot 24H_2O$ с примесью Co^{2+} и Ce^{3+} действительно может возникать СИ при создании инверсной заселенности в подсистеме ядерных спинов за счет корреляций электронной и ядерной подсистем. Более детальное количественное исследование этого явления с учетом процессов накачки явится предметом последующих работ.

Литература

1. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. "Мир", М., 1978.
2. Kudryavtsev I.K., Shumovsky A.S. Optica Acta, 1979, 26, p.923-928.
3. Ахметели А.М., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. ОИЯИ, Р17-82-39, Дубна, 1982.
4. Боголюбов Н.Н. /мл./, Шумовский А.С. В сб.: Труды VII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, 1984, с.6.
5. Боголюбов П.Н., Шавохина Н.С., Шумовский А.С. В сб.: Труды Рабочего совещания по пробл. излучения и детектирования гравитационных волн. ОИЯИ, Д2-83-689, Дубна, 1983, с.133.
6. Вайсфельд М.П., Имамутдинов Ф.С., Хасанов А.Х. Письма в ЖЭТФ, 1981, 34, №5, с.252.
7. Абрагам А., Блини Б. Электронный парамагнитный резонанс переходных ионов. "Мир", М., 1972, т.1.
8. Боголюбов Н.Н. /мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ТМФ, 1982, 52, №3, с.423.
9. Bogolubov N.N.(Jr.), Fam Le Kien, Shumovsky A.S. Physica A, 1984, 128A, p.82.
10. Боголюбов Н.Н. /мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ТМФ, 1984, 60, №2, с.254.

Рукопись поступила 8 мая 1985 года.